

CORRIGÉ 1 Soit la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = \frac{1}{2} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n}$$

① Soit f définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$ par $f(x) = \frac{3x}{1+2x}$.

f est une fonction rationnelle donc est dérivable sur son ensemble de définition D et :

$$f'(x) = \frac{3(1+2x) - 3x \times 2}{(1+2x)^2} = \frac{3}{(1+2x)^2} > 0$$

Donc f est strictement croissante sur $] -\infty, -\frac{1}{2}[$ et sur $] -\frac{1}{2}, +\infty[$

⚠ une fonction est toujours **monotone sur un intervalle**, jamais sur une réunion d'intervalles. Par exemple, il est faux de dire que f est strictement croissante sur $] -\infty, -\frac{1}{2}[\cup] -\frac{1}{2}, +\infty[$. L'exemple élémentaire est la fonction inverse, qui est strictement décroissante sur \mathbb{R}_-^* et sur \mathbb{R}_+^* mais **n'est pas** strictement décroissante sur \mathbb{R}^* comme on s'en rend compte aisément avec n'importe quelle paire de nombres de signes opposés :

$-2 < 5$ et pourtant **leurs inverses sont dans le même ordre** (ce qui prouve bien que la fonction inverse n'est pas strictement décroissante sur \mathbb{R}^*).

On a besoin de calculer les limites aux bornes de l'ensemble de définition pour dresser le tableau de variations.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \times 3}{x(2 + \frac{1}{x})} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{2 + \frac{1}{x}} = \frac{3}{2}$ par quotient (méthode classique du monôme dominant, valable je le rappelle uniquement quand $x \rightarrow +\infty$ ou $-\infty$)

de même, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{3}{2}$



Pour les limites à droite et à gauche en $-\frac{1}{2}$, il faut étudier le signe du dénominateur qui tend vers 0 :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$1+2x$	-	0	+

C'est ce tableau qui permet d'affirmer que : $\lim_{\substack{x \rightarrow -\frac{1}{2} \\ x < -\frac{1}{2}}} 1+2x = 0^-$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow -\frac{1}{2} \\ x > -\frac{1}{2}}} 1+2x = 0^+$

Or, $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} 3x = -\frac{3}{2} < 0$, donc : $\lim_{\substack{x \rightarrow -\frac{1}{2} \\ x < -\frac{1}{2}}} f(x) = +\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow -\frac{1}{2} \\ x > -\frac{1}{2}}} f(x) = -\infty$ par quotients de limites

Finalement, on obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	$\frac{3}{2}$ 	$+\infty$	$-\infty$ 

- ② (a) Montrons par récurrence que la propriété $P(n)$: « $0 < u_n < 1$ » est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

Initialisation : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $0 < \frac{1}{2} < 1$ donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ (cette locution permet de **fixer** un entier **arbitraire**) et supposons $P(n)$ vraie, c'est-à-dire :

$0 < u_n < 1$ f étant strictement croissante sur $]0;1[$, par application de cette fonction aux 3 membres de cette double inégalité, on obtient :

$$f(0) < f(u_n) < f(1) \text{ c'est-à-dire } 0 < u_{n+1} < 1 \text{ (car } f(0) = 0 \text{ et } f(1) = 1)$$

Finalement on a montré que, si $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$ l'est aussi, c'est-à-dire qu'on a montré $P(n) \implies P(n+1)$.

Comme on a montré cette implication pour un entier n quelconque, on a donc montré : $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \implies P(n+1)$

Conclusion : $P(n)$ est vraie au rang $n = 0$ et est héréditaire, donc, par principe de récurrence, est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

- (b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n}{1+2u_n} - u_n = \frac{3u_n}{1+2u_n} - \frac{u_n(1+2u_n)}{1+2u_n} = \frac{3u_n - u_n - 2u_n^2}{1+2u_n} = 2u_n \frac{1-u_n}{1+2u_n}$$

Or $2u_n > 0$ car $u_n > 0$ d'après la question précédente.

$1 - u_n > 0$ car $u_n < 1$ d'après la question précédente.

$1 + 2u_n > 0$ car $u_n > 0$ d'après la question précédente.

Finalement $u_{n+1} - u_n > 0$ et ceci est vrai pour l'entier n **arbitrairement** fixé dans \mathbb{N} , donc c'est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc la suite (u_n) est strictement croissante.

- ③ La suite (u_n) est croissante et majorée (par 1) donc est convergente (d'après le théorème de convergence monotone)

- ④ Montrons par récurrence que la propriété $P(n)$: « $u_n = \frac{3^n}{3^n + 1}$ » est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

Initialisation : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $\frac{3^0}{3^0+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons $P(n)$ vraie.

$$u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n} = \frac{3 \times \frac{3^n}{3^n+1}}{1+2 \times \frac{3^n}{3^n+1}} \text{ par hypothèse de récurrence.}$$

$$\text{Donc } u_{n+1} = \frac{3 \times 3^n}{3^n+1} \times \frac{1}{\frac{3^n+1+2 \times 3^n}{3^n+1}} = \frac{3^{n+1}}{3^n+1} \times \frac{3^n+1}{3 \times 3^n+1} = \frac{3^{n+1}}{3^{n+1}+1}$$

Finalement on a montré : $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \implies P(n+1)$

Conclusion : $P(n)$ est vraie au rang $n = 0$ et est héréditaire, donc, par principe de récurrence, est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$3 > 1 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n = +\infty \text{ et donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3^n} = 0$$

$$\text{Finalement, } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n}{3^n(1 + \frac{1}{3^n})} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{3^n}} = 1 \text{ par quotient de limite.}$$

CORRIGÉ 2 A) 1. $C_1 = 3$ et chaque côté donne naissance à 4 côtés donc $C_2 = 3 \times 4$. Ceci se reproduit à chaque nouvelle étape, donc $\forall n \in \mathbb{N}, C_n = 3 \times 4^{n-1}$

2. les 3 côtés de P_1 sont égaux et chaque côté donne naissance à 4 côtés égaux, donc les 12 côtés de P_2 sont égaux. Ceci se reproduit à chaque nouvelle étape donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les côtés de P_n sont égaux.

- B) 1. Par construction, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n$ donc (u_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = u_1 \times q^{n-1} = \frac{1}{3^{n-1}}$

2. Les $3 \times 4^{n-1}$ côtés de P_n sont égaux et de longueur $\frac{1}{3^{n-1}}$ donc le périmètre de P_n est $p_n = 3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$

3. $\frac{4}{3} > 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} = +\infty$ par produit.

- C) 1. Une hauteur de longueur h du triangle équilatéral P_1 est aussi une médiane, donc, par théorème de Pythagore, on a :
- $$u_1^2 = \left(\frac{u_1}{2}\right)^2 + h^2 \text{ donc } h = \frac{\sqrt{3}}{2}u_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$
- Donc l'aire de P_1 est $\mathcal{A}_1 = \frac{h \times u_1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ unités d'aire.
2. $\mathcal{A}_{n+1} - \mathcal{A}_n$ est l'aire de C_n triangles équilatéraux de côté u_{n+1} .
- On sait qu'une dilatation de facteur k multiplie les aires par k^2 , or un triangle équilatéral de côté u_{n+1} est obtenu par la dilatation de facteur u_{n+1} d'un triangle équilatéral de côté 1, donc son aire est $\mathcal{A}_1 \times u_{n+1}^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times u_{n+1}^2$.
- Finalement, $\mathcal{A}_{n+1} - \mathcal{A}_n = C_n \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times u_{n+1}^2$
3. Donc $d_n = \mathcal{A}_{n+1} - \mathcal{A}_n = 3 \times 4^{n-1} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{1}{3^n}\right)^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4 \times 4} \times \frac{4^n}{(3^2)^n} = \frac{3\sqrt{3}}{16} \times \left(\frac{4}{9}\right)^n$.

Or $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_1 + d_1$, $\mathcal{A}_3 = \mathcal{A}_2 + d_2 = \mathcal{A}_1 + d_1 + d_2$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathcal{A}_n = \mathcal{A}_1 + d_1 + d_2 + \dots + d_{n-1}$$

Or (d_n) est une suite géométrique de raison $\frac{4}{9}$ donc :

$$\sum_{k=1}^{n-1} d_k = d_1 \times \frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{3}}{12} \times \frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}}{\frac{5}{9}} = \frac{9\sqrt{3}}{5 \times 12} \left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right)$$

$$\text{Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} = 0, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} d_k = \frac{9\sqrt{3}}{5 \times 12} = \frac{3\sqrt{3}}{20}$$

$$\text{Finalement } \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{A}_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{A}_1 + \sum_{k=1}^{n-1} d_k = \mathcal{A}_1 + \frac{3\sqrt{3}}{20} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{20} = \frac{8\sqrt{3}}{20} = \frac{2\sqrt{3}}{5}$$

CORRIGÉ 3 ① f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $f'(x) = \frac{1}{2} \left(-\frac{a}{x^2} + 1\right) = \frac{1}{2x^2}(x^2 - a)$. Or $a > 1 > 0$, donc la croissance de la fonction racine donne $\sqrt{a} > \sqrt{1}$ puis en multipliant par $\sqrt{a} > 0$, on a $a > \sqrt{a} > 1 > 0$ et :

x	0	\sqrt{a}	a	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+
f		$+\infty$	\sqrt{a}	$+\infty$

Soit $x \in [\sqrt{a}; a]$.

$\sqrt{a} \leq x \leq a \implies f(\sqrt{a}) \leq f(x) \leq f(a)$ par croissance de f sur $[\sqrt{a}; a]$.

Or, $f(\sqrt{a}) = \sqrt{a}$ et $f(a) = \frac{a+1}{2} \leq \frac{a+a}{2} \leq a$, donc :

$\sqrt{a} \leq x \leq a \implies \sqrt{a} \leq f(x) \leq a$

- ② On a démontré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$, donc que la suite est bien définie. Démontrons par récurrence que la propriété $(P)(n)$: « $u_n \in [\sqrt{a}; a]$ » est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : $u_0 = a > 1$ et on a vu précédemment qu'on a $\sqrt{a} \leq a$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie, c'est-à-dire :

$\sqrt{a} \leq u_n \leq a$. Or, pour tout $x \in [\sqrt{a}; a]$ on a $f(x) \in [\sqrt{a}; a]$, donc $\sqrt{a} \leq u_{n+1} \leq a$.

Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ est vraie au rang $n = 0$ et est héréditaire donc est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- ③ Soit $n \in \mathbb{N}$.

$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{u_n} + u_n\right) - u_n = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{u_n} - u_n\right) = \frac{1}{2u_n} (a - u_n^2) \leq 0$ car $u_n \geq \sqrt{a} > 0$ donc (u_n) est décroissante.

De plus, (u_n) est minorée (par \sqrt{a}) donc (u_n) est convergente vers une limite $\ell \in [\sqrt{a}; a]$

- ④ D'une part $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.

D'autre part $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(\ell)$.

$\ell \in [\sqrt{a}; a]$ est donc solution de :

$$f(\ell) = \ell \iff \frac{1}{2} \left(\frac{a}{\ell} + \ell\right) = \ell \iff \frac{1}{2} \left(\frac{a}{\ell} - \ell\right) = 0 \iff \ell^2 = a \iff \ell = \sqrt{a}.$$

La dernière équivalence se justifiant par le fait que $\ell \in [\sqrt{a}; a]$ (donc $\ell > 0$).

⑤ $u_1 = \frac{1}{2}(1+2) = \frac{3}{2}$
 $u_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3} + \frac{3}{2}\right) = \frac{17}{12}$
 $u_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{24}{17} + \frac{17}{12}\right) = \frac{577}{408}$
 u_3 approche $\sqrt{2}$ à 10^{-5} près.

On introduit, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - \sqrt{a}$ qui mesure l'écart entre u_n et \sqrt{a} .

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{u_n} + u_n \right) - \sqrt{a} = \frac{1}{2} \frac{a + u_n^2 - 2u_n\sqrt{a}}{u_n} = \frac{(u_n - \sqrt{a})^2}{2u_n} = \frac{v_n^2}{2u_n}.$$

$u_n \geq \sqrt{a} \geq 1 \geq \frac{1}{2} \implies 2u_n \geq 1 \implies \frac{1}{2u_n} \leq 1$ par décroissance de la fonction inverse sur $]0; +\infty[$
 Finalement, en multipliant par v_n^2 , on a : $v_{n+1} \leq v_n^2$.

(b) Par récurrence, prouvons que la propriété $\mathcal{P}(n)$: « $0 \leq v_n < \frac{1}{2^{2^n}}$ » est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : $0 \leq v_0 \leq 0,5$ donc $0 \leq v_0 \leq \frac{1}{2^{2^0}}$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie, c'est-à-dire :

$$0 \leq v_n < \frac{1}{2^{2^n}} \implies 0 \leq v_n^2 < \frac{1}{(2^{2^n})^2} \implies 0 \leq v_{n+1} < \frac{1}{2^{2^n \times 2}} \implies 0 \leq v_{n+1} < \frac{1}{2^{2^{n+1}}}.$$

Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ est vraie au rang $n = 0$ et est héréditaire, donc est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(c) On en déduit $v_4 < \frac{1}{2^{2^4}} \leq \frac{1}{2^{16}} \leq \frac{1}{2^6} \times \frac{1}{2^{10}} < \frac{1}{10} \times \frac{1}{1000} \leq 10^{-4}$.

$$n = 12 \implies 2^n = 2^{12} \implies 2^n = 4 \times 2^{10} \implies 2^n > 4 \times 10^3 \text{ car } 2^{10} = 1024 > 1000.$$

$$\text{donc } n = 12 \implies 2^{2^n} > 2^{4000} \implies 2^{2^n} > (2^{10})^{400} > (10^3)^{400} \geq 10^{1200} > 10^{1000}.$$

u_{12} approche $\sqrt{2}$ avec une précision supérieure ou égale à 1000 décimales.